Πανελλαδικές εξετάσεις
Ημερήσιων – Εσπερινών Γενικών Λυκείων
Τρίτη 6 Ιουνίου 2023
Εξεταζόμενο μάθημα: Μαθηματικά Προσανατολισμού

Οι εκφωνήσεις μαζί με προτεινόμενες λύσεις
από την ομάδα του Ασκησόπολις

Θέμα Α

A1. Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει : $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$

(Μονάδες 6)

Απάντηση

Για $x \neq x_0$, ισχύει : $\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$.

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Δηλαδή $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$

A2. Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α. Πότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της; **(Μονάδες 4)**

Απάντηση

Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και επιπλέον ισχύει $\lim_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in\mathbb{R}$ και $\lim_{x\to\alpha^-}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in\mathbb{R}$

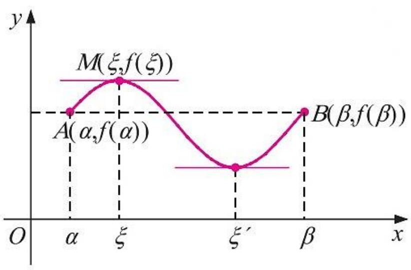
A3. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle (μονάδες 3) και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία (μονάδες 2). **(Μονάδες 5)**

Απάντηση

Αν μία συνάρτηση f είναι :

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) και
- $f(\alpha)=f(\beta)$

Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε : $f'(\xi)=0$



Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$
Τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη
Στον άξονα των x.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=1$.

β) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

γ) Για κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και γνησίως αύξουσα στο Δ, ισχύει ότι $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

δ) Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι μία «ένα προς ένα» (¨1-1¨) συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄

ε) Αν f,g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $f\circ g$ και $g\circ f$, τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

Απάντηση

α) Λάθος **β)** Λάθος **γ)** Λάθος **δ)** Σωστό **ε)** Σωστό

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\frac{4-e^{2x}}{e^x}$ και η συνάρτηση $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $h(x)=\ln x$

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f=g\circ h$. (Μονάδες 5)

Απάντηση

Είναι $A_f=\{x\in D_h \,/\, h(x)\in D_g\}=\{x>0 \,/\, \ln x\in\mathbb{R}\}=(0,+\infty)$.

Για $x>0$ $f(x)=(g\circ h)(x)=g(h(x))=\frac{4-e^{2h(x)}}{e^{h(x)}}=\frac{4-e^{2\ln x}}{e^{\ln x}}=\frac{4-e^{\ln x^2}}{x}=\frac{4-x^2}{x}, x>0$

Β2. i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία. (μονάδες 4)

ii) Να αποδείξετε ότι $\frac{4-\pi^2}{4-e^2}>\frac{\pi}{e}$. (μονάδες 4)

(Μονάδες 8)

Απάντηση

i) Για $x>0$: $f'(x)=\left(\frac{4-x^2}{x}\right)'=\frac{(4-x^2)'\cdot x-(4-x^2)\cdot(x)'}{x^2}=\frac{-2x^2-4+x^2}{x^2}=\frac{-x^2-4}{x^2}=-\frac{x^2+4}{x^2}<0$

άρα $f\searrow(0,+\infty)$

ii) Ισχύει ότι $\pi>e\overset{f\searrow(0,+\infty)}{\Leftrightarrow}f(\pi)<f(e)\Leftrightarrow\frac{4-\pi^2}{\pi}<\frac{4-e^2}{e}\overset{4-e^2<0}{\Leftrightarrow}\frac{4-\pi^2}{4-e^2}>\frac{\pi}{e}$

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f. **(Μονάδες 6)**

Απάντηση

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{4-x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\cdot\left(4-x^2\right)\right) = +\infty$ άρα η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4-x^2}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = \lim\limits_{x\to +\infty}(-x) = -\infty$ άρα η γραφική παράσταση της f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{4-x^2}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1 = \lambda$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left[f(x)-\lambda x\right] = \lim_{x\to +\infty}\left[f(x)-(-1)x\right] = \lim_{x\to +\infty}\left[f(x)+x\right] = \lim_{x\to +\infty}\left[\frac{4-x^2}{x}+x\right]$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{4-x^2+x^2}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{4}{x} = 0 = \beta$$

Άρα η $y=-x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

Ό

Β4. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)}$. **(Μονάδες 6)**

Απάντηση

$\left|\dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)}\right| = \dfrac{\left|\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)\right|}{|f(x)|} \le \dfrac{1}{|f(x)|}$ γιατί $\left|\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)\right| \le 1$ άρα

$-\dfrac{1}{|f(x)|} \le \dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)} \le \dfrac{1}{|f(x)|}$. Εφόσον $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$, θα έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ άρα και

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{|f(x)|} = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(-\dfrac{1}{|f(x)|}\right) = 0$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)} = 0$

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2-3x+3, & x<1 \\ \dfrac{1}{x}+\alpha, & x\ge 1 \end{cases}$ όπου $\alpha\in\mathbb{R}$, για την οποία γνωρίζουμε επιπλέον ότι $\displaystyle\int_2^3 xf(x)dx = 1$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$. **(Μονάδες 4)**

Απάντηση

$$\int_2^3 xf(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 x\left(\frac{1}{x}+\alpha\right)dx = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 (1+\alpha x)dx = 1 \Leftrightarrow \left[x+\frac{\alpha x^2}{2}\right]_2^3 = 1 \Leftrightarrow 3+\frac{9\alpha}{2}-2-\frac{4\alpha}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow 6+9\alpha-4-4\alpha = 2 \Leftrightarrow 5\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0.$$

Γ2. i) Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$. **(μονάδες 4)**

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και τη γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα x΄x . **(μονάδες 4)**

(Μονάδες 8)

Απάντηση

i) $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}(x-2)=-1$

$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1-x}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{-(x-1)}{x-1}=-1$

Άρα εφόσον $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-1$, έχουμε ότι $f'(1)=-1$

ii) (ε) : $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=-x+1\Leftrightarrow y=-x+2$, επομένως $\lambda_\varepsilon=-1\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=-1\Leftrightarrow \omega=135^0$ αφού $0\le\omega<90^o$ ή $90^o<\omega<180^o$.

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «ένα προς ένα» (¨1-1¨) (μονάδες 3) και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της (μονάδες 3). **(Μονάδες 6)**

Απάντηση

Για $x<1$ η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x)=2x-3<-1<0$.

Για $x>1$ η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x)=-\frac{1}{x^2}<0$.

1ος τρόπος: Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και συνεχής επομένως $f\searrow\mathbb{R}$ άρα και 1-1.

Η f έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-3x+3)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$.

2ος τρόπος: Η $f\searrow(-\infty,1)$ και συνεχής άρα $f(A_1)=f((-\infty,1))=\left(\lim\limits_{x\to1^-}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=(1,+\infty)$

Η $f\searrow[1,+\infty)$ και είναι συνεχής άρα $f(A_2)=f([1,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),f(1)\right]=(0,1]$

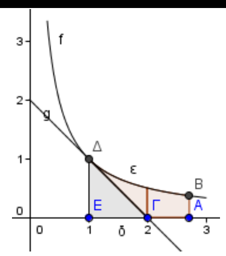
Εφόσον $f((-\infty,1))\cap f([1,+\infty))=\varnothing$ και f γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,1)$, $[1,+\infty)$ τότε θα έχουμε ότι για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\neq x_2$ ισχύει $f(x_1)\neq f(x_2)$ άρα η f είναι 1-1 με σύνολο τιμών $f(\mathbb{R})=(0,1]\cup(1,+\infty)=(0,+\infty)$

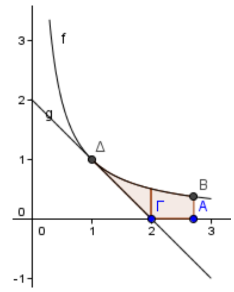
Γ4. Έστω (ε) : $y=-x+2$ η εξίσωση της εφαπτομένης του ερωτήματος Γ2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f με $x\ge1$, την ευθεία (ε) , τον άξονα x΄x και την ευθεία $x=e$. **(Μονάδες 7)**

Απάντηση

1ος τρόπος: $E(\Omega)=\int_1^e|f(x)|dx-(\Delta E\Gamma)=\int_1^e\frac{1}{x}dx-\frac{1}{2}(\Delta E)(E\Gamma)=$

$=\left[\ln|x|\right]_1^e-\frac{1}{2}=\ln e-\ln1-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ τ.μ.





2^{ος} τρόπος: Για $x>1$ η f' είναι παραγωγίσιμη με $f''(x)=\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)'=\dfrac{2}{x^3}>0$ άρα η f είναι κυρτή στο $[1,+\infty)$.

Άρα $f(x)\ge -x+2 \Leftrightarrow f(x)+x-2\ge 0$, για κάθε $x\ge 1$.

$$E(\Omega)=\int_1^2|f(x)+x-2|dx+\int_2^e|f(x)|dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x}+x-2\right)dx+\int_2^e\frac{1}{x}dx=$$

$$=\left[\ln|x|+\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^2+\left[\ln|x|\right]_2^e=\cancel{\ln 2}+\cancel{2}-\cancel{4}-\frac{1}{2}+\cancel{2}+1-\cancel{\ln 2}=\frac{1}{2}\ \text{τ.μ.}$$

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,2)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\ln(2-x)-\dfrac{1}{x}+\kappa$, όπου $\kappa\in\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2x}{x-1}=\ell\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\kappa=3$. **(Μονάδες 4)**

Απάντηση

Έστω η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)-2x}{x-1}$, $x\in(0,1)\cup(1,2)$ με $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=\ell\in\mathbb{R}$

Για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,2)$ είναι $f(x)=(x-1)g(x)+2x$ άρα

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left[(x-1)g(x)+2x\right]\Leftrightarrow -1+\kappa=2\Leftrightarrow \kappa=3$

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1,x_2 με $x_1<1<x_2$ (μονάδες 4) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $x_1<\dfrac{1}{3}$ (μονάδες 2) . **(Μονάδες 6)**

Απάντηση

Η $f(x)=\ln(2-x)-\dfrac{1}{x}+3$, $x\in(0,2)$ είναι συνεχής ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln(2-x)-\dfrac{1}{x}+3\right]=-\infty$ άρα υπάρχει $\alpha>0$ πολύ κοντά στο μηδέν τέτοιο ώστε $f(\alpha)<0$, $f(1)=2>0$ και $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left[\ln(2-x)-\dfrac{1}{x}+3\right]=-\infty$ άρα υπάρχει $\beta<2$ πολύ κοντά στο 2 τέτοιο ώστε $f(\beta)<0$. Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στα $[\alpha,1],[1,\beta]$ οπότε υπάρχουν $x_1\in(\alpha,1)$ και $x_2\in(1,\beta)$ τέτοια ώστε $f(x_1)=f(x_2)=0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ ως σύνθεση και άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$f'(x)=-\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2+x-2}{x^2(x-2)}$ της οποίας το πρόσημο φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-2		0		1		2		$+\infty$
x^2+x-2		+	0	−		−	0	+		+	
x^2		+		+	0	+		+		+	
$x-2$		−				−		−	0	+	
$f'(x)$						+		−			
f						↗		↘			

Είναι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$ και η f είναι συνεχής άρα $f\nearrow(0,1]$ και το x_1 είναι μοναδικό. Είναι $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(1,2)$ και η f είναι συνεχής άρα $f\searrow[1,2)$ και το x_2 είναι μοναδικό.

Είναι $f\left(\frac{1}{3}\right)=\ln\left(2-\frac{1}{3}\right)-\cancel{3}+\cancel{3}=\ln\frac{5}{3}>0$ αφού $\frac{5}{3}>1$ άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in\left(\alpha,\frac{1}{3}\right)$ τέτοιο ώστε $f\left(x_0\right)=0$, όμως στο διάστημα αυτό μοναδική ρίζα της $f\left(x\right)=0$ είναι το x_1 άρα $x_0=x_1$ και έτσι $x_1<\frac{1}{3}$.

Στα παρακάτω ερωτήματα, x_1 και x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ2.

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $M\left(\xi,f\left(\xi\right)\right)$, με $\xi\in\left(0,1\right)$, στο οποίο η κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ισούται με $\dfrac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$. **(Μονάδες 6)**

Απάντηση

Η f είναι συνεχής στο $\left[x_1,\frac{1}{3}\right]$, παραγωγίσιμη στο $\left(x_1,\frac{1}{3}\right)$ άρα εφαρμόζοντας το ΘΜΤ στο $\left[x_1,\frac{1}{3}\right]$ έχουμε ότι υπάρχει $\xi\in\left(x_1,\frac{1}{3}\right)\subseteq\left(0,1\right)$ τέτοιο ώστε $f'\left(\xi\right)=\dfrac{f\left(\frac{1}{3}\right)-f\left(x_1\right)}{\frac{1}{3}-x_1}=\dfrac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$ αφού $f\left(x_1\right)=0$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα ρητών συναρτήσεων με παράγωγο $f''\left(x\right)=-\dfrac{1}{\left(x-2\right)^2}-\dfrac{2}{x^3}<0$ για κάθε $x\in\left(0,2\right)$ άρα $f'\searrow\left(0,2\right)$, επομένως το ξ είναι μοναδικό.

Δ4. Αν επιπλέον F και G είναι δύο αρχικές συναρτήσεις της συνάρτησης f στο διάστημα $\left(0,2\right)$ με $F\left(x_1\right)=G\left(x_2\right)=0$, να αποδείξετε ότι:

i) $F\left(x_2\right)+G\left(x_1\right)=0$ **(μονάδες 4)**

ii) η εξίσωση $x_1F\left(x\right)+x_2G\left(x\right)=x_1+x_2-2x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $\left(x_1,x_2\right)$. **(μονάδες 5)**

(Μονάδες 9)

Απάντηση

i) Αφού F και G αρχικές της f τότε $F\left(x\right)=G\left(x\right)+c$ (1) για κάθε $x\in\left(0,2\right)$ με $c\in\mathbb{R}$.
Για $x=x_1$ στην (1) είναι $F\left(x_1\right)=G\left(x_1\right)+c\Leftrightarrow c=-G\left(x_1\right)$ (2) και για $x=x_2$ στην (1) είναι $F\left(x_2\right)=G\left(x_2\right)+c\Leftrightarrow c=F\left(x_2\right)$ (3) άρα από (2),(3) είναι $F\left(x_2\right)=-G\left(x_1\right)\Leftrightarrow F\left(x_2\right)+G\left(x_1\right)=0$

2ος τρόπος

Επειδή F και G είναι δύο αρχικές συναρτήσεις της συνάρτησης f στο διάστημα $\left(0,2\right)$ ισχύει ότι $F'(x)=G'(x)=f\left(x\right)\forall x\in\left(0,2\right)(1)$. Έχουμε ότι: $\int_{x_1}^{x_2}f\left(x\right)dx=\int_{x_1}^{x_2}f\left(x\right)dx\overset{(1)}{\Longleftrightarrow}$

$$\int_{x_1}^{x_2}F'\left(x\right)dx=\int_{x_1}^{x_2}G'(x)dx\Leftrightarrow\left[F\left(x\right)\right]_{x_1}^{x_2}=\left[G(x)\right]_{x_1}^{x_2}\Leftrightarrow F\left(x_2\right)-F\left(x_1\right)=G(x_2)-G(x_1)$$

$$\overset{\text{υπόθεση}}{\Longleftrightarrow}F\left(x_2\right)=-G(x_1)\Leftrightarrow F\left(x_2\right)+G(x_1)=0$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: κατά συνέπεια η σχέση $F\left(x_2\right)+G(x_1)=0$ με δεδομένο ότι $F\left(x_1\right)=G(x_2)=0$ είναι μία ταυτολογία.

ii) Είναι $x_1 < x < 1 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x) > f(x_1) = 0$ και $1 \le x < x_2 \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(x) > f(x_2) = 0$ άρα $f(x) > 0$ οπότε $G'(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ άρα η G είναι γνησίως αύξουσα στο (x_1, x_2) .

Για κάθε $x_1 < x < x_2 \overset{G\nearrow}{\Rightarrow} G(x) < G(x_2) = 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$.

Έστω η συνάρτηση $h(x) = x_1 F(x) + x_2 G(x) - x_1 - x_2 + 2x$, $x \in [x_1, x_2]$.
Η h είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων αφού F και G συνεχείς ως παραγωγίσιμες.
Είναι $h(x_1) = x_1 F(x_1) + x_2 G(x_1) - x_1 - x_2 + 2x_1 = x_2 G(x_1) - x_2 + x_1$ <0 αφού $x_2 > x_1$, $G(x_1) < 0$ και $F(x_1) = 0$.

Είναι $h(x_2) = x_1 F(x_2) + x_2 G(x_2) - x_1 - x_2 + 2x_2 = x_1 F(x_2) - x_1 + x_2 = -x_1 G(x_1) - x_1 + x_2 > 0$ αφού $x_2 > x_1$, $G(x_1) < 0$ και $F(x_1) = 0$.

Άρα $h(x_1) h(x_2) < 0$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ ως πράξεις άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $h'(x) = x_1 F'(x) + x_2 G'(x) + 2 = x_1 f(x) + x_2 f(x) + 2 = (x_1 + x_2) f(x) + 2 > 0$ γιατί $x_1, x_2 \in (0,2)$ άρα $x_1 + x_2 > 0$.Επομένως $h \nearrow [x_1, x_2]$ άρα η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο (x_1, x_2).